المحاضرة الثانية عشر

مبرهنة:

ليكن $f: X \longrightarrow Y = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ من الفضاء X إلى فضاء الجداء Y

يكون التطبيق f مستمراً إذا وفقط إذا كانت جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}_{\alpha \in I}$ مستمرة:

البرهان:

$X \xrightarrow{f} Y = \prod_\alpha Y_\alpha \xrightarrow{P_\alpha} Y_\alpha$ ($P_\alpha \circ f$)

* **لزوم الشرط:**

نفرض أن f تطبيق مستمر فإن جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}$ مستمرة لذلك تركيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر مع العلم أن P_α مستمرة

* **كفاية الشرط:**

لنفرض أن جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}$ مستمرة ولنأخذ $G \in \tau_\alpha$ « G مفتوحة في الفضاء الاحداثي Y_α » عندئذ $(P_\alpha \circ f)^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X

ولكن

$$(P_\alpha \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(P_\alpha^{-1}(G))$$

ولكن $P_\alpha^{-1}(G)$ هي من عناصر قاعدة الجداء.

وهكذا فإن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة من عناصر قاعدة الجداء هي مجموعة مفتوحة في X

وهذا يكفي حتى تكون f مستمر $\Leftarrow$ f مستمر

Alamal

/ /

مثال : (1)

ليكن لدينا التطبيق الآتي : $R \to R^2$

$t \to (x(t), y(t))$

مثلا معادلة الدائرة تساوي $x = r\cos t$ $y = r\sin t$

مثال (2)

ليكن لدينا تطبيق $R \to R^3$

$[a,b] \to R^3$

مثلا معادلة اللولب

$x = r\cos t$

$y = r\sin t$

$z = c t$

لفات اللولب

مثال : (3)

ليكن لدينا تطبيق $R^2 \to R^3$

مثلا معادلة الكرة في الفضاء الثلاثي

$x = r\cos u\cos v$

$y = r\sin u\cos v$

$z = r\sin v$

المعادلة المتجهية تكتب بالشكل :

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

ومستمرة اذا وفقط اذا كانت كل مركبة من احداثياتها مستمرة

ملاحظة: تشكل فضاءً جزئياً $a_1 \times X_2$

نفرض a_1 نقطة ثابتة من X_1 فالمجموعة $a_1 \times X_2$ تشكل فضاءً جزئياً من فضاء الجداء وهذا الفضاء الجزئي هوميومورفيزم (تكافئ توبولوجياً) للفضاء X_2 أي $a_1 \times X_2 \sim X_2$

$$a_1 \times X_2 = \{(a_1, x_2) ; x_2 \in X_2\}$$

وبالمثل

$$X_1 \times a_2 \sim X_1$$

وهذا المثال الذي يمكن تعميمه إلى فضاء جداء بشكل عام.

أي:

فضاء الجداء $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = X$ يحوي فضاء جزئياً X'_δ

بحيث يكون هوموموريفياً للفضاء الاحداثي X_δ

$$X'_\delta \sim X_\delta$$

$$a = (a_\alpha) \in X$$

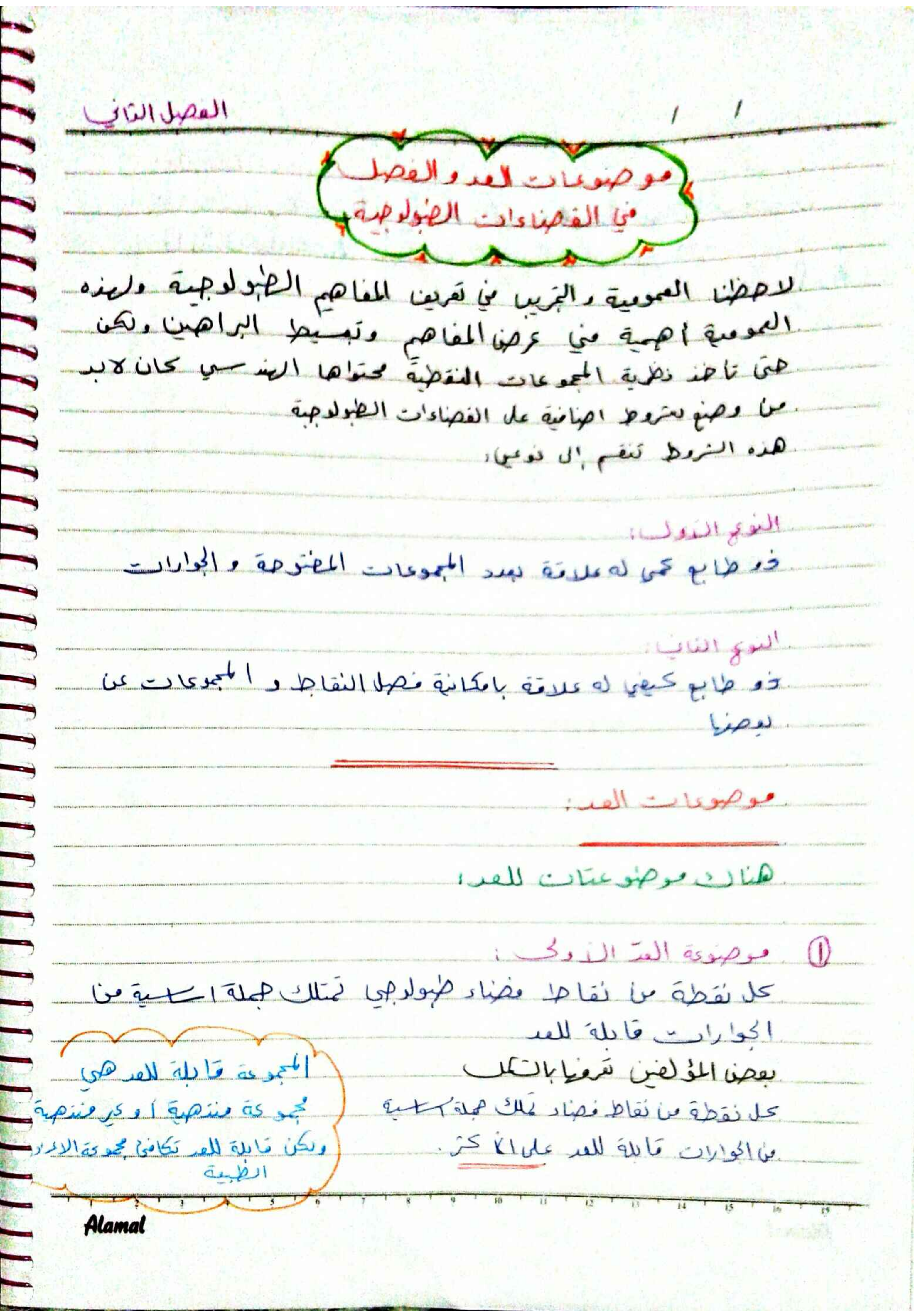
$$X'_\delta = \{x \in X : x_\alpha = a_\alpha ; \forall \alpha \in I \setminus \delta\}$$

ملاحظة:

اذا كانت $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ مجموعة جداء المجموعات

فإن لصاقة A تساوي جداء اللصاقات أي

$$\bar{A} = \prod_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$$



موضوعات العد والفصل في الفضاءات الطبولوجية

لاحظنا العمومية والتجريد في تعريف المفاهيم الطبولوجية ولهذه العمومية أهمية في عرض المفاهيم وتبسيط البراهين ولكن حتى تأخذ نظرية المجموعات النقطية محتواها الهندسي كان لابد من وضع شروط اضافية على الفضاءات الطبولوجية
هذه الشروط تنقسم إلى نوعين:

النوع الأول:
ذو طابع كمي له علاقة بعدد المجموعات المفتوحة والجوارات

النوع الثاني:
ذو طابع كيفي له علاقة بامكانية فصل النقاط والمجموعات عن بعضها

موضوعات العد:

هناك موضوعتان للعد:

① موضوعة العد الأولى:
كل نقطة من نقاط فضاء طبولوجي تمتلك جملة أساسية من الجوارات قابلة للعد
بعض المؤلفين تعرفها بالشكل
كل نقطة من نقاط فضاء تملك جملة أساسية من الجوارات قابلة للعد على الأكثر.

المجموعة قابلة للعد هي مجموعة منتهية أو غير منتهية ولكن قابلة للعد تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية

Alamal

مثال: (1)

لنا خذ الفضاء الطبولوجي المتقطع أي أن τ قوية

ولنفرضنا أن X غير منتهية وغير قابلة للعد

إن هذا الفضاء معدود أول مها كانت X لأن أي نقطة من نقاطه تملك جملة جوارات اساسية هي $\{\{x\}\}$ الاسرة المكونة من مجموعة وحيدة وهي المجموعة وحيدة العنصر X بالتالي هي منتهية أي قابلة للعد حتى لو كانت X غير منتهية.

مثال: (2)

لو أخذنا $X=R$ فضاء طبولوجي وكانت

$$\tau=\{u\in R \quad : 1\in u\}\cup\{\emptyset\}$$

هو أيضاً معدود أول لأن كل نقطة من نقاطه تملك جملة جوارات اساسية هي $\{\{1,x\}\}$ وبالتالي اي جوار لـ X لابد أن يحوي الواحد X

مثال: (3)

الفضاء المتري هو فضاء معدود أول:

لأن أي نقطة من نقاطه تملك جملة جوارات اساسية قابلة للعد وهي اسرة الكرات المطروحة من الشكل

$$\{B(x,\tfrac{1}{n})\}_{n\in N}$$

حيث n تمسح مجموعة الأعداد الطبيعية وهي قابلة للعد

مثال (4)

فضاء المتممات المنتهية (X, τ) حيث X مجموعة غير قابلة للعد (أي مثل R مثلاً) ليس معدود أول.

الفضاء ليس معدود أول لذا الفضاء لا يحقق موضوعة العد الأولى حيث R غير قابل للعد

الإثبات:

نفرض جدلاً أنه يحقق الموضوعة الأولى أي أنه لو أخذنا النقطة $x \in R$ فإننا نمتلك جملة جوارات أساسية قابلة للعد أي أن $\{u_n\}_{n \in N}$ هذه الجوارات جميعها مفتوحة وتحوي x وهي في حالتنا هذه مجموعات مفتوحة

وبالتالي فإن المجموعة (X/u_1) منتهية نسميها (A_1)

والمجموعة (X/u_2) منتهية نسميها (A_2)

والمجموعة (X/u_n) منتهية نسميها (A_n) وهكذا حتى اللانهاية

لو فرضنا أن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ فإن A

هي قابلة للعد لأنها اجتماع لمجموعات منتهية وهي مجموعة جزئية من X

المجموعة X/A هي غير خالية وغير قابلة للعد عندئذ يوجد منها نقطة مثل y مختلفة عن x فإن المجموعة $X/\{y\}$ مفتوحة وتحوي x اذاً هي جوار لـ x

يتميز هذا الجوار أنه لا يحوي أي من الجوارات $u_1, u_2, \dots, u_n$
وبالتالي هنا تناقض بالتالي النقطة x لا تملك جملة ~~أساسية~~
قابلة العد

---

② موضوعة العد الثانية
وهي أن يملك الفضاء الطبولوجي قاعدة قابلة للعد،
إنّ الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة سنطلق عليه معدود ثاني

ينتج من هذين التعريفين أنّ موضوعة العد الأولى تنتج من الثانية
أي أن كل معدود ثاني هو معدود أول.

الإثبات
مرت معنا سابقاً مبرهنة تقول أنّ

$$V = \{ v \in \beta \quad x \in v \} \iff X \text{ قاعدة للفضاء } \beta$$

جملة أساسية لجوارات x من أجل أي x من X

اذا كانت β قابلة للعد فإن أي جزء من أجزائها قابل للعد
ومنه فإنّ V قابلة للعد.
وبالتالي فإنّ أي جملة أساسية لجوارات النقطة x قابلة
للعد

مثال: (1)
الفضاء R معدود أول وهو معدود ثانياً أيضاً:
لأنه يملك قاعدة قابلة للعد وهي أسرة المجالات المفتوحة التي
أطرافها أعداد عادية مثل $]a, b[$ حيث أنّ $a, b \in Q$

/ /

مثال: (2)

لو أخذنا الفضاء التبولوجي المتقطع وكانت X غير قابلة للعد
هذا الفضاء معدود أول لكنه ليس معدود ثاني [illegible] لأنه
أصغر قاعدة له $\{\{x\}\}_{x\in X}$ أسرة المجموعات الوحيدة العنصر وهي
غير قابلة للعد لأن X غير قابلة للعد

مثال (3)

الفضاء R^2 معدود ثاني،

لأنه يملك قاعدة قابلة للعد وهي أسرة المستطيلات المفتوحة
